ইউনিট
৫

আংশিক ভগ্নাংশ

ভূমিকা

যদি a ও b যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা হয় তাহলে $\frac{a}{b}$ প্রতীক দ্বারা ভগ্নাংশ বুঝান হয়। ভগ্নাংশের উপরের অংশটিকে লব এবং নিচের অংশটিকে হর বলে। সাধারণত ভগ্নাংশের হর লবের থেকে বড় হয়। এক্ষেত্রে ভগ্নাংশটি প্রকৃত ভগ্নাংশ। যদি লব হরের থেকে বড় হয় তবে ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। যখন কোন মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক সহজ ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা হয়, তখন সহজ ভগ্নাংশগুলি প্রত্যেকটি মূল ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ।

এই ইউনিটে আমরা আংশিক ভগ্নাংশ সম্পর্কে আলোচনা করা হলো।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- *মূলদ ও আংশিক ভগ্নাংশ সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন।*
- *একটি প্রকৃত ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করতে পারবেন যখন (ক) হরের উৎপাদকগুলি একঘাত ও পুনরাবৃত্ত নয় এবং (খ) উৎপাদকগুলি একঘাত ও পুনরাবৃত্ত।*
- *একটি প্রকৃত ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করতে পারবেন যখন হরের উৎপাদকগুলি দ্বিঘাত।*
- *একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে একটি পূর্ণ অংশ এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশে বিভক্ত করে একাধিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করার দক্ষতা অর্জন করবেন।*

মূলদ ভগ্নাংশ ও আংশিক ভগ্নাংশ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূলদ ভগ্নাংশ এবং আংশিক ভগ্নাংশ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fraction) ঃ

$f(x) / \phi(x)$ এই ধরনের রাশিকে মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ বলে

যখন $f(x) = a_o x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \text{- - - - - - -} + a_m$

এবং $\phi(x) = b_o x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \text{- - - - - - -} + b_n$

এখানে a_o, a_1 - - - - a_m, bo, b_1 - - - b_n ধ্রুবক এবং m, n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা। যদি n, m এর চাইতে বড় হয় অর্থাৎ যদি হরের চলরাশির মাত্রা বা সূচক লবের মাত্রার চাইতে বড় হয় তবে $f(x) / \phi(x)$ কে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।

যেমন (i) $\frac{5x-3}{3x^2+4x+1}$ (ii) $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+3)}$

আবার যদি n-এর মান m-এর সমান বা ছোট হয় অর্থাৎ যদি লব, হর অপেক্ষা নিম্নমাত্রার না হয় তবে ঐ ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নংশ বলে। একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ ভাগের প্রক্রিয়ায় একটি পূর্ণ অংশ ও একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা হয়। যেমন-

$$\frac{x^2+1}{x+1} = (x-1) + \frac{2}{x+1}$$

আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fractions) : যদি কোন মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ $f(x)/\phi(x)$ দুই বা ততোধিক সহজ ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশিত হয়, তখন তাকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হয়েছে বলা হয়।

যেমন ঃ $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$

এখানে জটিল ভগ্নাংশ $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ $\frac{1}{x+1}$ এবং $\frac{2}{x+2}$

আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণ ঃ হরের উৎপাদকগুলো একঘাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- একটি প্রকৃত ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করতে পারবেন যখন (ক) হরের উৎপাদকগুলো একঘাত বিশিষ্ট ও অপুনরাবৃত্ত, (খ) হরের উৎপাদকগুলো একঘাত বিশিষ্ট ও পুনরাবৃত্ত।

আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণ (Resolution into partial fractions) ঃ

একটি প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হলে তার হরকে প্রথমে সরলতম বাস্তব উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে। এই উৎপাদকগুলি এক ঘাত বিশিষ্ট বা দ্বিঘাত বিশিষ্ট হবে এবং কোন কোন উৎপাদক পুনরাবৃত্ত হতে পারে। হরের উৎপাদকসমূহের ধরণ অনুযায়ী বিভিন্ন পদ্ধতি প্রয়োগ করে ভগ্নাংশগুলিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হয়।

যদি প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলি একঘাতবিশিষ্ট এবং অপুনরাবৃত্ত হয়:

যদি প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদনগুলি একঘাতবিশিষ্ট এবং অপুনরাবৃত্ত হয়, তবে $(x-a)$ আকারের প্রতিটি উৎপাদকের জন্য $\frac{A}{x-a}$ আকারের একটি করে আংশিক ভগ্নাংশের উদ্ভব হবে।

ধরি $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $\phi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ এক্ষেত্রে $\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ যেখানে A, B, C ধ্রুবক সংখ্যা। উভয়পক্ষকে $\phi(x)$ বা $(x-a)(x-b)(x-c)$ দিয়ে গুণ করলে একটি অভেদ তৈরি হবে যা হচ্ছে

$$f(x) + A(x-b)(c-c) + B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)$$

উক্ত সম্পর্কটি x- এর যে কোন মানের জন্য সঠিক হবে। এতে পর্যায়ক্রমে x– এর পরিবর্তে a, b, c বসিয়ে A, B, C এর মান নির্ণয় করা যায়। নিচের উদাহরণ হতে বিষয়টি সম্পর্কে আরও পরিষ্কার জ্ঞান লাভ করা যাবে।

উদাহরণ-1 ঃ $\frac{3x^2-8x-4}{x^3+x^2-2x}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ এখানে $x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$

$$\therefore \frac{3x^2-8x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{3x^2-8x-4}{x(x-1)(x+2)}$$

ধরুন, $\frac{3x^2-8x-4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$x(x-1)(x+2)$ দিয়ে উভয়পক্ষকে গুণ করে

$$3x^2-8x-4 \equiv A(x-1)(x+2)+Bx(x+2) + Cx(x-1) \text{ - - - - - - (i)}$$

যেহেতু এটি একটি অভেদ, সুতরাং এটি x- এর সকল মানের জন্য সত্য। x– এর যে সমস্ত মানের জন্য হরের প্রত্যেকটি উৎপাদক শূন্য হয়, পর্যায়ক্রমে x এর পরিবর্তে ঐ মানগুলি বসান হলো-

সমীকরণ (i) এ $x = 0$ বসিয়ে $-4 = -2A$ $\quad \therefore A = 2$

সমীকরণ (i) এ $x = 1$ বসিয়ে $3-8-4 = 3B$ $\quad \therefore B = -3$

সমীকরণ (i) এ $x = -2$ বসিয়ে $12+16-4 = 6C$ $\quad \therefore C = 4$

সুতরাং নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ

$$\frac{3x^2-8x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+2}$$

যদি প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলি একঘাত বিশিষ্ট এবং পুনরাবৃত্ত হয়

যদি প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলি একঘাত বিশিষ্ট এবং পুনরাবৃত্ত হয়, তবে $(x-a)^n$ আকারের প্রতিটি উৎপাদকের জন্য $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+-------+\frac{A_n}{(x-a)^n}$ আকারের n সংখ্যক আংশিক ভগ্নাংশের উদ্ভব হতে পারে।

ধরুন, $\phi(x)=(x-a)^3(x-b)$

তবে $\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\frac{D}{x-b}$

উভয়পক্ষকে $\phi(x)$ বা $(x-a)^3(x-b)$ দ্বারা গুণ করলে

$$f(x)\equiv A_1(x-a)^2(x-b)+A_2(x-a)(x-b)+A_3(x-b)+D(x-a)^3$$

এতে $x=b$ বসান হলে, D এর মান বের হবে এবং $x=a$ বসান হলে A_3 এর মান পাওয়া যাবে। কিন্তু অবশিষ্ট ধ্রুবকসমূহের মান সরাসরি বের করা যাবে না। এক্ষেত্রে সহগ সমীকৃতকরণ পদ্ধতি ব্যবহার করে ধ্রুবক সমূহের সমান সংখ্যক সমীকরণ তৈরি করে তাদের সমাধান করে ধ্রুবকসমূহের মান নির্ণয় করা যায়। উপরোক্ত ক্ষেত্রে A_1, A_2 এর জন্য দুইটি সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে হবে। নিচের উদাহরণ হতে বিষয়টি সম্পর্কে আরও পরিষ্কার জ্ঞান লাভ করা যাবে।

উদাহরণ-2 ঃ $\frac{16}{(x+1)^2(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $\frac{16}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}$

উভয় পক্ষকে $(x+1)^2(x-3)$ দ্বারা গুণ করে

$16\equiv A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2$ - - - - - - (i)

এটি একটি অভেদ বলে $x-$ এর সকলমানের জন্যই সত্য, এতে $x=3$ বসিয়ে

$16=A\times0+B\times0+C(3+1)^2$ অথবা $16C=16$ $\therefore$ $C=1$

আবার $x=-1$ বসিয়ে

$16=A\times0+B(-1-3)+C\times0$ অথবা $-4B=16$ $\therefore$ $B=-4$

এই অভেদটির ডান পার্শ্বে x^2 এর সহগ A ও C এবং বাম পক্ষ x^2 মুক্ত।

$\therefore$ (1) নং এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$0=A+C$

অথবা $0=A+1$ [C এর মান বসিয়ে]

$\therefore$ $A=-1$

অতএব, নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $\frac{16}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{-1}{x+1}+\frac{-4}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-3}$

পুনরাবৃত্ত একঘাত উৎপাদকের জন্য দীর্ঘ ভাগ (Long division for repeated linear factors)

ধরা যাক, প্রদত্ত ভগ্নাংশটি $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ এবং $\phi(x)=(x-a)^n\Psi(x)$.

$(x-a)^n$ এর আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয় করার জন্য $x-a=y$ বসান হলো, তাহলে

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^n\Psi(x)}=\frac{f(a+y)}{y^n\Psi(a+y)}$$

$$=\frac{1}{y^n}\frac{A_{o+1}A_1y+A_2y^2+-----}{B_o+B_1y+B_2y^2+----}$$

এখানে লব ও হর y এর উচ্চক্রম শক্তি অনুযায়ী সাজানো হয়েছে। এখন A_0+A_1y+ - - - - কে B_0+B_1y+ - - - - দিয়ে ভাগ করতে হবে যতক্ষণ পর্যন্ত অবশিষ্টে একটি সাধারণ উৎপাদক y^n হয়। সাজিয়ে লিখলে যা নিম্নোক্ত আকার ধারণ করবে-

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{1}{y^n}\left\{C_0+C_1y+C_2y^2+ - - - - - - +C_{n-1}y^{n-1}+\frac{y^n\alpha(y)}{\Psi(a+y)}\right\}$$

$$= \frac{C_0}{y^n}+\frac{C_1}{y^{n-1}}+\frac{C_2}{y^{n-2}}+ - - - - - - +\frac{C_{n-1}}{y}+\frac{\alpha(y)}{\Psi(\alpha+y)}$$

$$= \frac{C_0}{(x-a)^n}+\frac{C_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{C_2}{(x-a)^{n-2}}+ - - - - \frac{C_{n-1}}{(x-a)}+\frac{\beta(x)}{\psi(n)}$$

উদাহরণ-3 ঃ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুনঃ $\frac{x^2-8x+9}{(x+1)(x-2)^3}$

সমাধান ঃ $x-2=y$ বসালে রাশিটি হবে,

$$\frac{(y+2)^2-8(y+2)+9}{y^3(y+3)} = \frac{1}{y^3}\cdot\frac{-3-4y+y^2}{3+y}$$

এখন $-3-4y+y^2$ কে $3+y$ দিয়ে ভাগ করতে হবে যতক্ষণ পর্যন্ত অবশিষ্টে একটি উৎপাদক y^3 হয়।

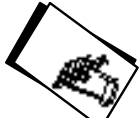
$$3+y\ )\ -3-4y+y^2\ (-1-y+\frac{2}{3}y^2$$

$$\underline{-3-y}$$
$$-3y+y^2$$
$$\underline{-3y-y^2}$$
$$2y^2$$
$$\underline{2y^2+\frac{2}{3}y^3}$$
$$-\frac{2}{3}y^3$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশ

$$= \frac{1}{y^3}\left\{-1-y+\frac{2}{3}y^2-\frac{2y^3}{3(3+y)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y^2}+\frac{2}{3y}-\frac{2}{3\,(3+y)}$$

$$= -\frac{1}{(x-2)^3}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+1)}$$

অনুশীলনী-৫.১

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন ঃ

1. $\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$
2. $\frac{1}{(1+x)(1+2x)(1+3x)}$
3. $\frac{7x-1}{1-5x+6x^2}$
4. $\frac{3x^2+14x-8}{x^3-2x^2-8x}$
5. $\frac{6x-3}{(x+1)^2(x-2)}$
6. $\frac{x+1}{x^2(x-1)^2}$
7. $\frac{3x^2-5}{(x+2)^3}$
8. $\frac{7x^2+12x+2}{(x+1)^3(x-2)}$
9. $\frac{1}{(x-1)^5(x+1)}$
10. $\frac{5x-12}{(x+2)(x^2-1)}$

আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণ ঃ হরের উৎপাদকগুলো দ্বিঘাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- একটি ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন, যখন হরের উৎপাদকগুলো দ্বিঘাত।

দ্বিঘাত উৎপাদক

যদি $\phi(x)$ এর উৎপাদকসমূহ অপুনরাবৃত্ত দ্বিঘাত উৎপাদক হয়; (x^2+ax+b) বা (x^2+b) আকারের প্রতিটি

দ্বিঘাত উৎপাদকের জন্য অনুষঙ্গী ভগ্নাংশটির লবে দুইটি ধ্রুবক রাশি সহ $\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ আকরের একটি করে আংশিক ভগ্নাংশের সৃষ্টি হবে।

ধরুন, $\phi(x) = (x^2+ax+b)(x-c)$

$\therefore\ \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b} + \dfrac{C}{(x-c)}$

অতএব $f(x) \equiv (Ax+B)(x-c) + C(x^2+ax+b)$

এক্ষেত্রে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে $x = c$ বসিয়ে শুধুমাত্র c এর মান নির্ণয় করা যায়। অবশিষ্ট ধ্রুবক A এবং B এর মান নির্ণয় করার জন্য সহগসমীকৃতকরণ পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া হয়।

উদাহরণ-1 ঃ $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

উভয় পক্ষকে $(x+1)(x^2+1)$ দিয়ে গুণ করলে

$3x-1 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$

যেহেতু এটি একটি অভেদ, x এর যে কোন মানের জন্য এটি সত্য

এতে $x = -1$ বসিয়ে

$3(-1)-1 = A\{(-1)^2 + 1\}+B\times 0$ অথবা $2A = -4$ $\therefore A = -2$

আবার উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে

$A+B = 0$ অথবা $B-2 = 0$ $\therefore B = 2$

আবার উভয় পক্ষ হতে x-এর সহগ সমীকৃত করে, $B+C = 3$,

বা, $2+C = 3$ $\therefore C = 1$

অতএব নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{-2}{x+1} + \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

উদাহরণ-2 ঃ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন, $\dfrac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)}$

সমাধান ঃ ধরুন $\dfrac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)} = \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

উভয় পক্ষকে $(x-1)^2(x^2+4)$ দিয়ে গুণ করে

$$x^2+x \equiv A(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4)+(Cx+D)(x-1)^2 \text{ - - - - - (i)}$$

(i) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই $A = \frac{2}{5}$

যেহেতু (i) একটি অভেদ, সুতরাং x^3 ও x^2 এর সহগ এবং ধ্রুবক পদগুলিকে পর্যায়ক্রমে সমীকৃত করে,

$0 = B+C$ অর্থাৎ $C = -B$

$1 = A - B + D - 2C,$

$0 = 4A - 4B - D$

এইগুলি হতে আমরা পাই,

$B = \frac{11}{25}$, $D = \frac{4}{25}$, $C = \frac{-11}{25}$

অতএব, $\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{2}{5(x-1)^2} + \frac{11}{25(x-1)} - \frac{11x-4}{25(x^2+4)}$

উদাহরণ-3 ঃ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর $\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}$

সমাধান ঃ ধরুন $\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$

উভয় পক্ষকে $(x^2+2)(x^2+3)$ দ্বারা গুণ করে

$x^3+x^2+1 \equiv (Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2)$ - - - - - - (i)

(i) এ $x^2 = -2$ বসিয়ে পাই

$-2x - 2 + 1 = (Ax+B)(-2+3)$

বা, $-2x-1 = Ax+B$ - - - - - (ii)

(ii) নং অভেদ হতে যথাক্রমে x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই, $A = -2$, $B = -1$

আবার (i) এ $x^2 = -3$ বসিয়ে আমরা পাই-

$-3x - 3 + 1 = -(Cx+D)(-3+2)$

বা, $-3x - 2 = -Cx - D$ - - - - - - - (iii)

(iii) নং অভেদ হতে যথাক্রমে x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই, $C = 3$, $D = 2$

$\therefore \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} = \frac{3x+2}{x^2+3} - \frac{2x+1}{x^2+2}$

অনুশীলনী-৫.২

1. $\frac{x^2+x+1}{(x^2-2)(x-1)}$

2. $\frac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}$

3. $\frac{3x^2-3x+2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}$

4. $\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$

5. $\frac{2x^3+2x^2+4x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

6. $\frac{1}{(x^2+9)(x^2+16)}$

অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে পূর্ণ অংশ ও প্রকৃত ভগ্নাংশে বিভক্ত করার পর আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

লব এবং হর সমমাত্রিক অথবা লবের মাত্রা হরের মাত্রা অপেক্ষা বৃহত্তর হলে ঐ ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। ভাগের প্রক্রিয়ার এটিকে একটি পূর্ণ অংশ ও একটি প্রকৃত ভগ্নাংশে রূপান্তর করা যায়।

(1) যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের মাত্রা সমান।

অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের মাত্রা সমান হলে ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে এটিকে $\frac{f(x)}{\phi(x)} = A + \frac{\psi(x)}{\phi(x)}$ আকারের লেখা যায়। যেখানে A একটি ধ্রুবক এবং $\psi(x)$ এর মাত্রা $\phi(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা কম। অর্থাৎ $\frac{\psi(x)}{\phi(x)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

উদাহরণ-1 ঃ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন ঃ $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$

সমাধান ঃ ধরুন, $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = A + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$

উভয় পক্ষকে x^2+2x-3 দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x^2+5x-11 \equiv A(x+3)(x-1)+B(x-1)+C(x+3) \text{ ----------- (i)}$$

যেহেতু (i) নং সমীকরণ একটি অভেদ, সুতরাং x এর সকল মানের জন্য এটি সত্য-

(i) এ $x=-3$ বসিয়ে আমরা পাই $18-15-11=-4B$

অথবা $-4B=-8 \quad \therefore B=2$

আবার (i) এ $x=1$ হলে

$2+5-11=4C,\quad$ অথবা $4C=-4 \quad \therefore C=-1$

(i) এর উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$2=A \quad \therefore A=2$

অতএব $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = 2 + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1}$

(2) যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবের মাত্রা হরের মাত্রা অপেক্ষা এক বেশী।

এক্ষেত্রে ভগ্নাংশটি ভাগ প্রক্রিয়ায় $\frac{f(x)}{\phi(x)} = Ax+B+\frac{\Psi(x)}{\phi(x)}$ আকারে লেখা যায়।

যেখানে $\frac{\psi(x)}{\phi(x)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং A ও B দুটি ধ্রুবক।

উদাহরণ-2 ঃ $\frac{x^4+1}{x(x^2-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $\frac{x^4+1}{x(x^2-1)} = Ax+B+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+1}$

উভয় পক্ষকে $x(x^2-1)$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$x^4+1 \equiv (Ax+B)\,x(x-1)(x+1)+C(x-1)(x+1)+D(x+1)\,x+Ex(x-1) \text{ - - - (i)}$$

এই অভেদটিতে $x=1$ বসালে

$1+1 = D(1+1)$ অথবা $2D = D$ $\quad \therefore\ D = 1$

আবার $x = -1$ বসালে

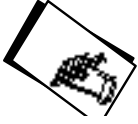
$2 = 2E \quad \therefore\ E = 1$

আবার $x = 0$ বসালে

$1 = -C \quad \therefore\ C = -1$

উভয় পক্ষে x^4 এর সহগ সমীকৃত করে পাই $A = 1$

উভয় পক্ষে x^3 এর সহগ সমীকৃত করে $B = 0$

অতএব $\dfrac{x^4+1}{x(x^2-1)} = x + \dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$

অনুশীলনী-৫.৩

1. $\dfrac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}$

2. $\dfrac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$

3. $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

4. $\dfrac{x^3-x^2+4}{(x-1)^2x}$

5. $\dfrac{x^3-3}{(x+2)(x^2+1)}$

6. $\dfrac{x^4}{x^4-1}$

7. $\dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)}$

8. $\dfrac{x^4}{x^3+1}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-৫.১

1. $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3}$

2. $\dfrac{1}{2(1+x)} - \dfrac{4}{(1+2x)} + \dfrac{9}{2(1+3x)}$

3. $\dfrac{4}{(1-3x)} - \dfrac{5}{(1-2x)}$

4. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{4}{x-4}$

5. $\dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2}$

6. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{(x-1)} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

7. $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{12}{(x+2)^2} + \dfrac{7}{(x+2)^3}$

8. $\dfrac{2}{(x-2)} - \dfrac{2}{(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^3}$

9. $\dfrac{1}{2(x-1)^5} - \dfrac{1}{4(x-1)^4} + \dfrac{1}{8(x-1)^3} - \dfrac{1}{16(x-1)^2} + \dfrac{1}{32(x-1)} - \dfrac{1}{32(x+1)}$

10. $\dfrac{-22}{3(x+2)} + \dfrac{17}{2(x+1)} + \dfrac{7}{6(x-1)}$

অনুশীলনী-৫.২

1. $\dfrac{-3}{(x-1)} + \dfrac{4x+5}{x^2-2}$

2. $\dfrac{(2x+1)}{(x^2+1)} - \dfrac{2}{(x+1)}$

3. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{(x-1)}{x^2-x+1}$

4. $\dfrac{1}{2(x-1)^2} + \dfrac{1}{2(x^2+1)}$

5. $\frac{x+2}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}$

6. $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{(x^2+9)} - \frac{1}{7} \frac{1}{(x^2+16)}$

অনুশীলনী-৫.৩

1. $1 - \frac{4}{x-1} + \frac{8}{x-2}$
2. $2 + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1}$
3. $1 + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(x-c)}$
4. $1 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$
5. $1 - \frac{11}{5(x+2)} + \frac{x-7}{5(x^2+1)}$
6. $1 - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$
7. $x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$
8. $x + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$